

BENFORD'S LAW ERKLÄRT

Unter Verzicht auf mathematische Exaktheit und Vollständigkeit sollen folgende Überlegungen die Korrektheit von Benford's Law plausibilisieren:

Mit der Annahme, dass zwar nicht die jeweilige Ziffer z , wohl aber ihr Logarithmus zur Basis 10 - $\log_{10}(z) = \lg(z)$ - gleichverteilt ist, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Ziffer der Zahl X im Intervall von z bis $z + 1$ liegt, wie folgt:

$$p(X \text{ ist Element von } X_z) = \lg(z + 1) - \lg(z)$$

Unter Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen (hier vorausgesetzt) folgt daraus die als Benford's Law oder (Newcomb-)Benfordsches Gesetz bekannte Formel:

$$p(X \text{ ist Element von } X_z) = \lg(1 + 1/z)$$

Wir begründen nun die vorstehende Annahme der Gleichverteilung wie folgt:

Zunächst stellen wir an unser Verteilungsgesetz die Anforderung, dass es sich nicht ändern soll, wenn jede Zahl mit einer beliebigen, aber festen Konstante c multipliziert wird (sogenannte Skaleninvarianz). Welches Verteilungsgesetz aber erfüllt diese Anforderung? Hier hilft es weiter, man statt der Zahl X deren Mantisse betrachtet:

$$Z = M \cdot 10^n, \text{ wobei } 1 \leq M < 10 \text{ gelte.}$$

Logarithmiert man nun die Mantisse so ergibt sich:

$$\lg(M \cdot c) = \lg(M) + \lg(c)$$

Die Anforderung an unser Verteilungsgesetz lautet nunmehr einfacher, dass es sich nicht ändern soll, wenn zu jeder Zahl eine beliebige, aber feste Konstante c addiert wird.

Addition bedeutet für die die Verteilung beschreibende Dichtefunktion dann lediglich eine Verschiebung auf der X-Achse. Weil nun der Flächeninhalt unter der Dichtefunktion stets den Wert 1 hat, folgt daraus sogleich, dass der Funktionswert der Dichte (der Abschnitt auf der X-Achse) stets 1 sein muss. Somit gilt für jedes M : $\lg(M) = 1$. Mit anderen Worten $\lg(M)$ ist für alle M gleichverteilt.